INSTITUCION EDUCATIVA COLEGIO MIGUEL ANGEL MARTIN

Esperamos que se encuentren todos bien, Dios nos bendiga y permita que podamos superar pronto esta crisis, cuídense y cuidemos a los demás quedándonos en casa y evitando el contagio de COVID-19.

Evaluación		Recuperación		Guía	X	Taller			Refuerzo	
Periodo	II	Grado	11	Asignatura	Cálculo				fecha	06/08
Nombre del docente		EISSON FABIAN LESMES J. lesmeseissoncolmartin2020@gmail.com 3188638528.			Nombre del estudiante					

GRADO 11 MATEMÀTICAS

GUIA DE APRENDIZAJE 9

semanas del 26 julio al 06 de agosto 2021

DESEMPEÑO GENERAL: DETERMINA CON EXACTITUD POR INSPECCIÓN Y POR PROCEDIMIENTOS MATEMÁTICOS Y ANALÍTICOS EL LÍMITE DE UNA FUNCIÓN Y LA CONTINUIDAD DE LA MISMA APLICANDO PROPIEDADES.

EXPLORACIÓN

Los limites tienen diversas aplicaciones en contextos de nuestro entorno, lee las dos situaciones que aparecen a continuación y responde las preguntas

Saberes previos

¿Qué ocurre si se divide a 1 consecutivamente entre 0,1; 0,001; 0,0001? ¿El valor que se obtiene aumenta o disminuye? Explica.

Analiza

Juan afirma que, al reemplazar x por valores cada vez más próximos a 4, la función $f(x) = \frac{3}{x-4}$ crece o decrece indefinidamente.

- ¿Es cierto lo que dice Juan?

ESTRUCTURACIÓN DEL CONOCIMIENTO

Límites infinitos

Para saber si Juan tiene razón, se pueden tomar algunos valores cercanos a 4. Observa:

$f(3{,}9) = -30 \quad f(3{,}9999) = -30000 \quad f(4{,}0001) = 30000 \quad f(4{,}001) = 3000$

La afirmación de Juan es correcta, la función f decrece de manera indefinida mientras x se aproxima a 3 por la izquierda y crece de la misma forma mientras x se aproxima a 3 por la derecha. Juan construyó una tabla con los valores que obtuvo y luego trazó el bosquejo de la gráfica correspondiente. (Figura 3.20).

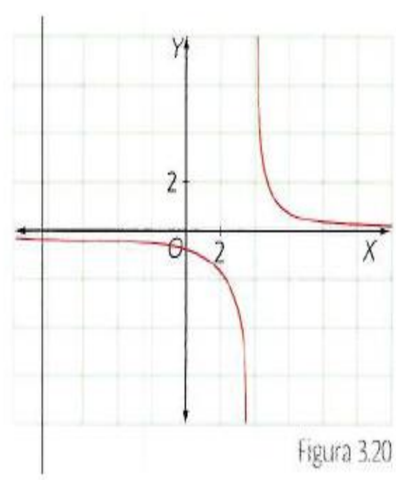


Figura 3.20

Juan observó que a medida que x tomaba valores muy próximos a 4 por la izquierda, los valores de $f(x)$ se hacían cada vez más y más pequeños y que, por otro lado, mientras x se acercaba mucho a x por la derecha, los valores de $f(x)$ crecían indefinidamente.

La expresión $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$ se lee como **el límite de la función $f(x)$ cuando x tiende al punto a es $+\infty$**, e indica que cuando los valores de la variable independiente x se acercan cada vez más al punto a, tanto por la izquierda como por la derecha, los valores de $f(x)$ se hacen cada vez más grandes.

De la misma forma, se dice que $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$ si se verifica que, cuando los valores de la variable independiente x se acercan cada vez más al punto a, los valores de $f(x)$ se hacen arbitrariamente pequeños.

Para expresar que los límites por la derecha alrededor de un punto a son $+\infty$ o $-\infty$ se usan las notaciones:

$\lim_{x \to a^+} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty$, respectivamente.

Para indicar que los límites por la izquierda alrededor de un punto a son $+\infty$ o $-\infty$ se emplean las notaciones:

$\lim_{x \to a^-} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty$, respectivamente.

Para escribir mediante límites el comportamiento de la función que construyó Juan (en el caso de la situación planteada en la sección Analiza) se escribe:

$\lim_{x \to 4^-} f(x) = -\infty$ y $\lim_{x \to 4^+} f(x) = +\infty$.

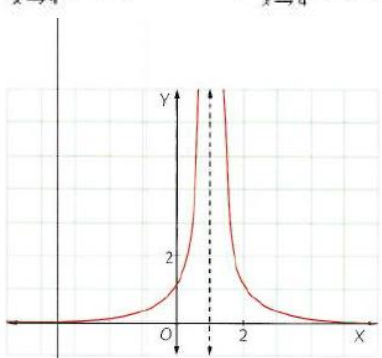


Figura 3.21

Ejemplo 1

A continuación se estudian los límites infinitos de la función $f(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$. Como se observa en la Figura 3.21, cuando x se acerca a 1, tanto por la derecha como por la izquierda, la función crece indefinidamente y sin cota.

Esto se resume mediante los siguientes límites:

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x \to 1^+} \frac{1}{(x-1)^2} = +\infty \\ \lim_{x \to 1^-} \frac{1}{(x-1)^2} = +\infty \end{array}\right\} \to \lim_{x \to 1} \frac{1}{(x-1)^2} = +\infty$$

Límites en el infinito

ANALIZA

La cantidad de una droga en la corriente sanguínea t horas después de inyectada intramuscularmente está dada por la función $f(t) = \frac{10t}{t^2 - 1}$.

- Al pasar el tiempo, ¿cuál es la cantidad límite de droga en la corriente sanguínea?

Para responder la pregunta en la sección Analiza, se puede construir una tabla de valores para observar cómo varía la cantidad de droga a medida que pasan las horas.

t	1	5	10	100	200	300	500	1000
f(x)	5	1,92	0,99	0,09999	0,04999	0,0333	0,01999	0,09999

Tabla 3.13

Cuando t toma valores tan grandes como se quiera, $f(t)$ se acerca a 0. Esto se escribe con la notación de límites como: $\lim_{t \to +\infty} f(t) = 0$.

La expresión $\lim_{x \to +\infty} f(x) = b$ se lee como el **límite de la función $f(x)$ cuando x tiende a $+\infty$ es b** e indica que cuando los valores de la variable independiente x se están haciendo cada vez mayores ($x \in \mathbb{R}^+$), los valores de $f(x)$ se acercan a b.

INSTITUCION EDUCATIVA COLEGIO MIGUEL ANGEL MARTIN

Esperamos que se encuentren todos bien, Dios nos bendiga y permita que podamos superar pronto esta crisis, cuídense y cuidemos a los demás quedándonos en casa y evitando el contagio de COVID-19.

La expresión $\lim_{x \to -\infty} f(x) = b$ se lee como el **límite de la función $f(x)$ cuando x tiende a $-\infty$ es b** e indica que cuando los valores de la variable independiente x se están haciendo cada vez menores ($x \in \mathbb{R}^-$), los valores de $f(x)$ acercan a b.

Ejemplo 1

En la tabla se muestran los valores que toma la función $f(x) = \frac{3}{x^5}$ en puntos alrededor de $x = 0$ (Figura 3.25).

x	-100	-10	-1	0	1	10	100
$f(x)$	$-3 \cdot 10^{-10}$	$-3 \cdot 10^{-5}$	-3	ne	3	$3 \cdot 10^{-5}$	$3 \cdot 10^{-10}$

Tabla 3.14

Cuando x toma valores tan grandes como se quiera, $f(x)$ se aproxima más a 0, es decir, $\lim_{x \to +\infty} \frac{3}{x^5} = 0$ y, cada vez que x toma valores tan pequeños como se quiera, $f(x)$ también se aproxima a 0, esto es $\lim_{x \to -\infty} \frac{3}{x^5} = 0$.

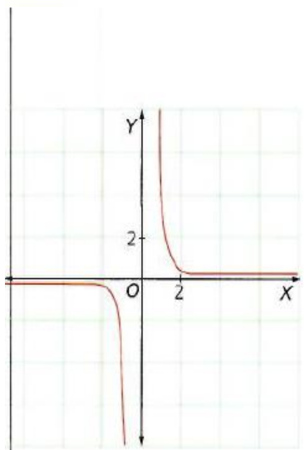


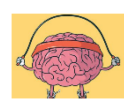
Figura 3.25

Ejemplo 2

Para calcular $\lim_{x \to +\infty} \frac{3 - 4x}{\sqrt{9x^2 + 1}}$, se debe identificar que éste es indeterminado de la forma ∞/∞ por ende, se aplica la técnica que consiste en dividir el numerador y el denominador entre el término de mayor grado de éstos que corresponde a x, puesto que, en el denominador, el mayor exponente es x^2 y se encuentra dentro de una raíz cuadrada. Como x tiende a $+\infty$, entonces $\sqrt{x^2} = |x| = x$. Por lo anterior, se divide cada término de la expresión entre x.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{3 - 4x}{\sqrt{9x^2 + 1}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{3}{x} - \frac{4x}{x}}{\sqrt{\frac{9x^2}{x^2} + \frac{1}{x^2}}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{3}{x} - 4}{\sqrt{9 + \frac{1}{x^2}}} = \frac{0 - 4}{\sqrt{9 + 0}} = \frac{-4}{\sqrt{9}} = -\frac{4}{3}$$

PRÁCTICA Y TRANSFERNCIA



Parte 1

1 Completa la tabla de valores para cada función. Luego, determina si $f(x)$ tiende a $+\infty$ o a $-\infty$ cuando x tiende a 4 por la izquierda y por la derecha.

a. $f(x) = \frac{1}{x - 4}$

x	3,9	3,99	3,999	4	4,001	4,01	4,1
$f(x)$							

Tabla 3.10

b. $f(x) = \frac{-1}{x - 4}$

x	3,9	3,99	3,999	4	4,001	4,01	4,1
$f(x)$							

Tabla 3.11

c. $f(x) = \frac{1}{(x - 4)^2}$

x	3,9	3,99	3,999	4	4,001	4,01	4,1
$f(x)$							

2 Elabora una tabla de valores para cada función a partir de la cual se pueda calcular el límite de $f(x)$ cuando x tiende a 3 por la izquierda y por la derecha.

a. $\lim_{x \to -3^+} \frac{1}{x^2 - 9}$ $\qquad$ $\lim_{x \to -3^-} \frac{1}{x^2 - 9}$

b. $\lim_{x \to -3^+} \frac{x}{x^2 - 9}$ $\qquad$ $\lim_{x \to -3^-} \frac{x}{x^2 - 9}$

Comunicación

3 Indica si existen los siguientes límites dada la gráfica de la función $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$ (Figura 3.22).

a. $\lim_{x \to 2} f(x)$ $\qquad$ b. $\lim_{x \to -2^+} f(x)$

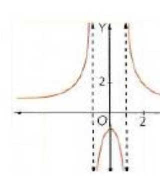


Figura 3.22

INSTITUCION EDUCATIVA COLEGIO MIGUEL ANGEL MARTIN

Esperamos que se encuentren todos bien, Dios nos bendiga y permita que podamos superar pronto esta crisis, cuídense y cuidemos a los demás quedándonos en casa y evitando el contagio de COVID-19.

Parte 2

1 Completa la tabla de valores para cada función. Luego, utiliza el resultado para estimar el límite de $f(x)$ cuando x crece indefinidamente y sin cota.

a. $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$

x	−100	−10	−1	0	1	10	100
$f(x)$							

Tabla 3.15

b. $f(x) = \dfrac{x}{x-5}$

x	−100	−10	−1	0	1	10	100
$f(x)$							

Tabla 3.16

c. $f(x) = \dfrac{x-3}{x^2-4}$

x	−100	−10	−1	0	1	10	100
$f(x)$							

Tabla 3.17

d. $f(x) = \dfrac{2x^3}{1+x^3}$

x	−100	−10	−1	0	1	10	100
$f(x)$							

Tabla 3.18

2 Calcula los límites.

a. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x}{x-3}$

b. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x}{2x+1}$

c. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2}{2x^2+1}$

d. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2}{x+1}$

e. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x}{x^2+2}$

f. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2}{7-x^2}$

g. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x+1}$

h. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x+3}{x+1}$

3 Relaciona cada función con su respectivo límite.

a. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2+5x+2}{3x+6}$ ( ) $\dfrac{1}{3}$

b. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x-1}{2x+4}$ ( ) 2

c. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{5x+2}{\sqrt{4x^3+x}}$ ( ) $\dfrac{3}{2}$

d. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^3+4x}{x^3-1}$ ( ) $\dfrac{1}{2}$

e. $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{\dfrac{x^2+x}{4x^2+1}}$ ( ) 1

f. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{5+x+x^4}{3x^4+2x^2}$ ( ) 0

4 La población de una especie de animales está modelada mediante la función:

$f(x) = \dfrac{20+3x^2}{x^2+6x+9}$, donde x se mide en años.

¿Se puede afirmar que la especie tiende a desaparecer después de muchos años?

5 Un equipo de fútbol desea que todos sus aficionados adquieran el bono que les permitirá ingresar a todos los partidos de la temporada. La siguiente función muestra el número de aficionados que comprará el bono desde el momento en que se lanza la oferta (x en meses):

$$f(x) = \frac{60x+810}{x^2+9}$$

¿Cuántos aficionados comprarán el bono si se mantiene la promoción por un tiempo ilimitado?

AUTOEVALUACIÓN

Realice la evaluación de su trabajo en este aprendizaje teniendo en cuenta los siguientes criterios, tenga en cuenta que 1 es lo mínimo y 5 lo máximo, marque con una X según la evaluación en cada criterio:

CRITERIO	1	2	3	4	5
Colaboración y participación institucional					
Respeto y buen trato en sus relaciones					
Cumplimiento de compromisos firmados					
Uso de vocabulario adecuado y buena presentación					
Entrega oportuna de trabajos					
NOTA FINAL					